Lista 2 - TCM

1. A equação da energia para meio estacionário sem geração interna de energia térmica é dada em coordenadas cilíndricas por

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{1}$$

em que k é a condutividade térmica do meioe r é uma variável representando a distância radial entre o centro do cilindro e o raio externo dado por R. Pela lei da condução de Fourier a taxa de calor por condução para um cilindro com gradiente radial de temperatura é dada por

$$\dot{q} = -kA\frac{dT}{dr} = -k2\pi rL \tag{2}$$

- Considere um fio de cobre com raio r_1 e comprimento L no qual passa uma certa corrente elétrica I. Este fio é envolto por uma membrana plástica (dois cilindros concêntricos) conforme mostrado na figura (1), que ilustra uma vista da seção transversal do fio. as condições de contorno são

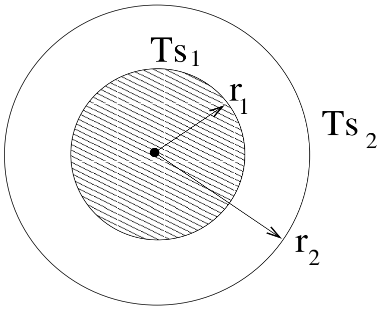

Figura 1: Figura esquemática da questão 03

$T(r = r_1) = Ts_1$ e $T(r = r_2) = Ts_2$. Determine a distribuição de temperatura entre r_1 e r_2 e mostre que a resistência térmica de condução em coordenadas cilíndricas através de cascas cilíndricas é dada por

$$R_{cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$$

- Em um dia com poucos ventos e com o ar a temperatura ambiente de 300K o escoamento da circulação externa de ar fornece um coeficiente de transferência de calor por convecção de 5 $W/m^2.K$. O fio de cobre possui um raio de 1,5mm e o raio total do fio + membrana plástica é de 3 mm. A condutividade térmica da membrana plástica que engloba o fio é $k = 0.25W/m.K$ e a emissividade da superfície da membrana é dada por $\epsilon = 0.95$. A constante de Stephan Boltzmann vale $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}$ e do lado externo da membrana plástica o processo convectivo ocorre paralelamente à transferência de calor por radiação entre a superfície externa do fio e a meio ambiente à 300K. Qual seria a temperatura da superfície do fio se a temperatura da superfície externa do fio (ao final da membrana) é de 310K? A perda de calor por radiação nesse caso é significativa? Justifique sua resposta e lembre que o coeficiente de transferência de calor por radiação h_r aplicado na analogia entre convecção e radiação é dado por $h_r = \sigma\epsilon(T_s + T_\infty)(T_s^2 + T_\infty^2)$.

- Para a mesma temperatura da superfície do fio, encontrada no problema anterior, despreze os efeitos de radiação térmica e descubra a nova temperatura da superfície externa do fio (ao final da membrana).

2. Em sala de aula foi mostrado que uma aleta de área de seção transversal uniforme, com condição de contorno de transferência de calor por convecção na extremidade troca calor com o ambiente com a seguinte taxa $\dot{q}_a$:

$$\dot{q}_a = \sqrt{hPkA_c}\theta_b \left[\frac{\sinh(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\sinh(mL)} \right],$$

as variáveis utilizadas na equação acima já foram previamente definidas em sala de aula. A expressão acima foi obtida pela aplicação da lei da condução de Fourier na base da aleta. Pelo princípio da conservação da energia, a taxa de calor por condução na base da aleta deve ser idência à taxa de perda de calor por convecção em toda a superfície externa da mesma. Mostre que a avaliação de $\dot{q}_a$ através da equação abaixo fornece o mesmo resultado dado para $\dot{q}_a$ deduzido em sala de aula e repetido na equação acima.

$$\dot{q}_a = \int_{A_a} h\left[T(x) - T_\infty\right] dA = \int_{A_s} h\theta(x) dA_s + h\theta(L) A_c,$$

em que A_a representa a área total da aleta, incluindo sua extremidade. Essa área é dada por $A_a = A_s + A_c$, em que A_c é a área da seção transversal e representa a área da extremidade da aleta, enquanto $A_s = PL$. Aqui dA_s é um elemento de área de superfície dado por $dA_s = Px$.

3. A solução geral da equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, homogênea e com coeficientes constantes, responsável por reger a distribuição de temperatura em uma aleta de seção transversal uniforme é dada por:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx},$$

deduza as expressões que compõe a tabela abaixo para as três condições de contorno não deduzidas em sala de aula.

Caso	Condição da extremidade $x = L$	$\theta(x)/\theta_b$	$\dot{q}_a$
B	$\frac{d\theta}{dx} = 0$ em $x = L$	$\frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$	$M\tanh(mL)$
C	$\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b)\sinh(mx)+\sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}$	$M\frac{[\cosh(mL)-\theta_L/\theta_b]}{\sinh(mL)}$
D	$\theta(L\to\infty) = 0$	e^{-mx}	M

Tabela 1: Tabela com a solução para aletas de seção transversal uniforma com diferentes condições de contorno. Aqui $M = \sqrt{hPkA_c}\theta_b$.

4. Considere uma aleta em formato de tronco de cone de acordo com a figura (2)

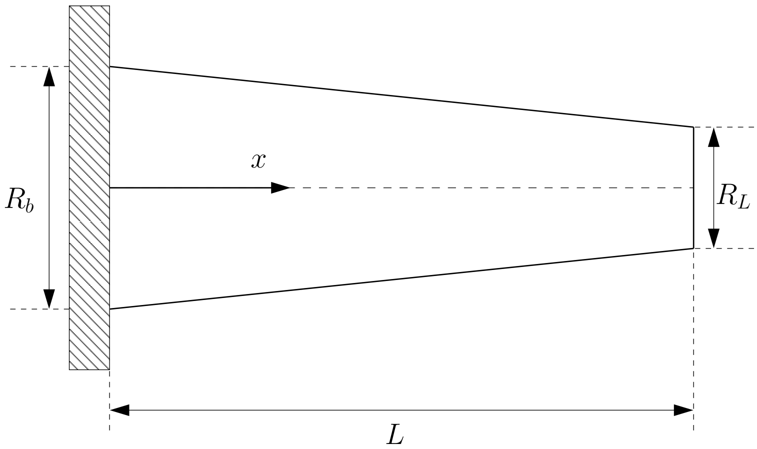

Figura 2: Vista lateral de uma aleta com formato de tronco de cone.

A equação diferencial ordinária que rege a distribuição de temperatura em uma aleta arbitrária com área de seção reta não uniforme é dada por:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\right)\frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c}\frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}\right)(T - T_\infty) = 0, \tag{3}$$

em que A_c é a área da seção transveral da aleta e A_s é a área da superfície lateral da mesma. Utilizando o Teorema de Pappus para determinação da área lateral de um tronco de cone, além da transformação $\theta(x) = T(x) - T_\infty$, mostre que a equação (3) nesse caso é dada por

$$\theta^{''} + f(x)\theta^{'} - g(x)\theta = 0, \tag{4}$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são dadas por

$$f(x) = \frac{2\,(R_L - R_b)}{\pi\,[R_b L + (R_L - R_b)\,x]} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2h\left[L^2 + (R_b - R_L)^2\right]^{1/2}}{k\,[R_b L - (R_b - R_L)\,x]} \tag{5}$$

5. Tente resolver a equação (4) utilizando algum programa de computador de notação simbólica, como o Mathematica ou o Maple, para valores definidos de k, h, L, R_b, R_L com condições de contorno $\theta(0) = \theta_b$ e $\theta(L) = \theta_L$. Em que θ_b e θ_L são valores numéricos prescritos com $\theta_b > \theta_L$. Trace uma curva da sua solução $\theta \times x$.