Transferência de Calor Avançada

Prof. Rafael Gabler Gontijo - UnB

Questionário 2

Para responder as perguntas abaixo você deverá assistir os seguintes vídeos do canal:

- Equação geral da condução de calor
- Interpretação da equação geral da condução de calor
- Notação indicial - Parte 1
- Notação indicial - Parte 2

Questão 1

Na última aula síncrona o professor chegou na seguinte equação integral oriunda da aplicação do princípio de conservação de energia a um volume contínuo pertencente a um meio estacionário:

$$\int_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\int_s \boldsymbol{q}'' \cdot \hat{n} dA + \int_V \dot{q} dV, \tag{1}$$

utilizando o teorema da divergência mostre que a versão diferencial desta equação é dada por:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}'' + \dot{q} \tag{2}$$

Questão 2

Baseado nas diferenças argumentativas entre a dedução do vídeo postado no Youtube e esse dedução iniciada na última aula síncrona (Live) e finalizada aqui, interprete utilizando suas próprias palavras a ideia do Teorema da Divergência de Gauss.

Questão 3

Baseado na aula "Interpretação da equação geral da condução de calor" liste na forma de tópicos os argumentos gerais utilizados entre a enunciação de uma lei física e a visualização de um campo colorido Euleriano que descreve o comportamento de determinada grandeza que varia no espaço e no tempo.

Questão 4

Para um problema de condução sem geração interna a equação geral da condução é dada por:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}'', \tag{3}$$

em que ρ é a massa específica do fluido, C_p seu calor específico à pressão constante, T é o campo Euleriano de temperatura, t representa o tempo e $\boldsymbol{q}''$ é o vetor fluxo de calor. A lei de Fourier pode ser utilizada aqui para modelar esse fluxo de calor. Em seu caso mais geral, para meios não-isotrópicos (ou seja, em materiais nos quais as propriedades se comportam de diferentes maneiras de acordo com a direção analisada), a lei de Fourier estabelece que

$$\boldsymbol{q}'' = -\boldsymbol{\mathcal{K}} \cdot \nabla T, \tag{4}$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ é um tensor de segunda ordem, conhecido como *tensor condutividade térmica*. Usando seus conhecimentos de notação indicial, responda os seguintes items.

- (a) Mostre que no caso mais geral de um tensor condutividade térmica não-uniforme (ou seja, no caso em que $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ varia no espaço), a equação da energia é dada por:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}) \cdot \nabla T + \boldsymbol{\mathcal{K}} \colon \nabla\nabla T \tag{5}$$

- (b) Para um meio isotrópico, esse tensor condutividade térmica é representado em termos do tensor identidade através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = k\boldsymbol{I}, \tag{6}$$

  em que k é a condutividade térmica do material (grandeza escalar) e $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade (tensor de segunda ordem). Mostre que nesse contexto (meio isotrópico), a equação (5) se reduz à

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla k \cdot \nabla T + k\nabla^2 T. \tag{7}$$

Questão 5

Uma barra unidimensional de material metálico de comprimento L encontra-se vinculada a dois extremos de temperatura. As condições de contorno são dadas por $T(0) = T_1$ e $T(L) = T_2$. O modelo esquemático explorado nessa questão encontra-se representado na figura (1). Seu desafio consiste em de-

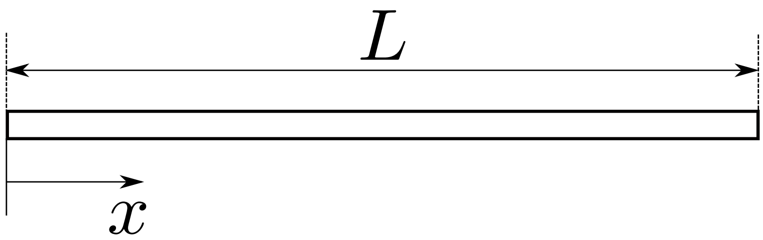

Figura 1: Representação esquemática da geometria abordada na Questão 01.

duzir uma expressão analítica (exata) para a distribuição de temperatura ao longo da barra na condição de regime permanente, sem geração interna, porém para o caso de condutividade térmica variável ao longo do espaço devido a variações de temperatura. A partir de sua expressão teórica, numericistas terão uma nova relação para validarem códigos computacionais que visem explorar problemas de transferência de calor em sistemas físicos nos quais a condutividade térmica não pode ser assumida constante. Seu ponto de partida será a equação (7). Baseado nesta equação responda os itens a seguir:

- (a) A fim de buscarmos um modelo para expressar o comportamento de $k(x)$, consideremos a lei de Wiedemann-Franz-Lorenz, que relaciona a condutividade elétrica, k_e, com a condutividade térmica, k, em sólidos metálicos, dada por:

$$\frac{k}{k_e} = LT,$$

  em que L é uma constante, denominada constante de Lorenz. Utilizando esta lei em conjunto com a equação geral da condução de calor e seus conhecimentos matemáticos sobre a regra da cadeia, mostre que em regime permanente unidimensional a equação (7) se torna:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + T\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k_e L} = 0 \tag{8}$$

  Você precisará resolver a equação (8) no limite assintótico em que $\dot{q} \to 0$. Essa solução envolverá uma série de passos que você deverá seguir ao longo dos itens dessa questão.

- (b) Inicialmente, tratemos T como uma variável independente. Para isso, faça $f(T) = \frac{dT}{dx}$ e mostre que a equação (8) na ausência de geração interna pode ser expressa por:

$$f^2 + Tf\frac{df}{dT} = 0; \tag{9}$$

- (c) Coloque agora f em evidência e note que você terá duas soluções possíveis para a equação diferencial (9). Uma delas ($f = 0$) não faz sentido físico, logo estamos buscando a solução para a equação diferencial expressa em parênteses após o processo de colocarmos f em evidência na equação (9). Divida essa equação por f e integre os dois lados com respeito a T para mostrar que a solução que buscamos para f é dada por:

$$f(T) = \frac{\exp(C_1)}{T}, \tag{10}$$

em que C_1 é uma constante de integração;

- (d) Substitua agora em (9) a expressão que relaciona $f(T)$ proposta no item c. Em seguida integre os dois lados com relação a x e chame $\exp(C_1)$ de C_1, dado que essa constante ainda não foi determinada. Ao final desse processo você deverá mostrar que:

$$T(x) = \sqrt{2\,(C_1 x + C_2)}; \tag{11}$$

- (e) Aplique as condições de contorno para determinar as constantes C_1 e C_2 para mostrar finalmente que:

$$T(x) = \sqrt{\frac{T_2^2 x + T_1^2\,(L - x)}{L}} \tag{12}$$

- (f) Obtenha a expressão para $T(x)$ para o caso no qual k é constante. Considere agora $L = 1m$, $T_1 = 150K$ e $T_2 = 50K$ e plote em algum programa próprio para isso as curvas para $T(x)$ para os dois casos. Você deverá utilizar círculos preenchidos ($\bullet$) para o caso 1 (k constante) e o símbolo ($\times$) para o caso 2 (k variável).