Lista de Exercícios - Microhidrodinâmica

Prof. Rafael Gabler Gontijo

2 de novembro de 2017

Questão 01

Assista o vídeo "Low Reynolds number flows" do Professor e cientista G.I. Taylor e escreva um texto dissertativo de três páginas sobre o mesmo. O vídeo pode ser acessado no link abaixo:

https://www.youtube.com/watch?v=51-6QCJTAjU

Questão 02

Utilizando notação indicial, demonstre a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla^2 \boldsymbol{b} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{b} \right) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{b}$$

Questão 03

Parta da equação de Stokes estacionária para um fluido Newtoniano viscoso, escoando em regime incompressível e na ausência de forças de campo. Mostre que nessas condições o campo de pressão é uma função harmônica. Em outras palavras, mostre que nessas condições o campo de pressão é regido pela equação de Laplace. **Dica:** use a identidade vetorial demonstrada no item anterior.

Questão 04

Demonstre que no limite de escoamento em baixo Reynolds o campo de vorticidade $\boldsymbol{\xi}$ é regido pela equação de Laplace, ou seja, também é uma função harmônica. E que o campo de velocidades $\boldsymbol{v}$ é um campo biharmônico, ou seja: $\nabla^4 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Questão 05

Considere um escoamento uniforme com velocidade no infinito u_∞ na direção $\hat{e}_z$ que incide sobre uma esfera de raio a, de acordo com a figura (1)

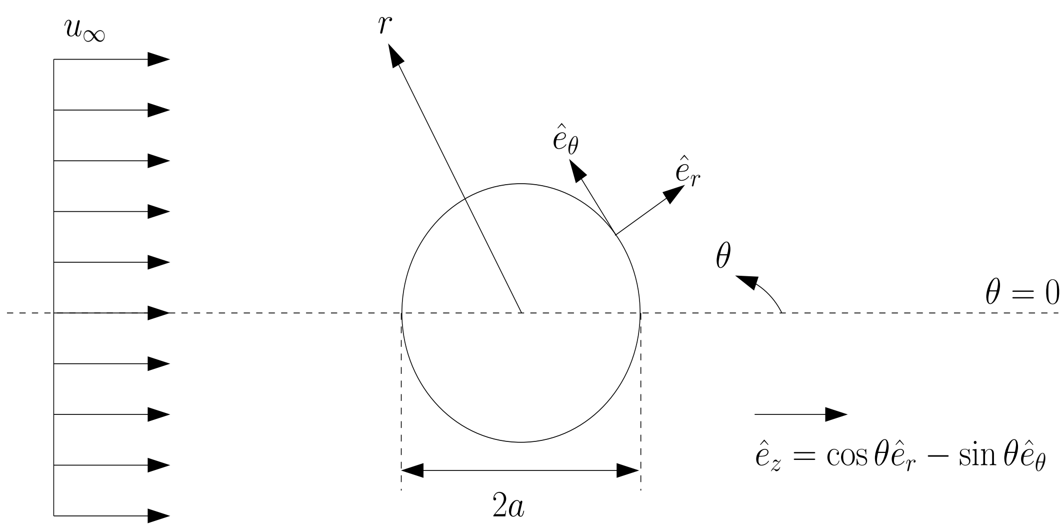

Figura 1: Desenho esquemático da questão 05

Ao longo do desenvolvimento dessa questão você deverá considerar que o escoamento é axissimétrico e em coordenadas esféricas. Dessa forma, temos que $v_\phi = 0$, em que $\hat{e}_\phi$ é o vetor ortonormal aos vetores de base $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$. Assim, o campo de velocidades do escoamento é dado por:

$$\boldsymbol{v} = v_r(r,\theta)\hat{e}_r + v_\theta(r,\theta)\hat{e}_\theta.$$

Além disso, considere $Re \ll 1$ e a hipótese de regime quasi-estacionário e escoamento incompressível. Considere também as versões já adimensionais das equações governantes, usando como escalas de referência para velocidade, tempo, pressão e comprimento u_∞, a/u_∞, $\mu u_\infty/a$ e a respectivamente. Baseado nessas informações desenvolva os itens a seguir:

- a - Escreva a equação da continuidade para esse escoamento em coordenadas esféricas;
- b - Escreva as equações do movimento nas direções $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$;
- c - Proponha condições de contorno para v_r e v_θ em $r = 1$ (superfície da esfera e $r \to \infty$;
- d - Nesse ponto do desenvolvimento, você deve ter percebido, pelas condições de contorno propostas no item anterior que $v_r = f(r)\cos\theta$ e $v_\theta = g(r)\sin\theta$. Substituindo essas expressões para v_r e v_θ na equação do movimento na direção r mostre que $\frac{\partial p}{\partial r} = H(r)\cos\theta$, em que $H(r)$ é uma função que envolve $f(r)$, $g(r)$ e suas derivadas. Isso demonstra que $p(r,\theta) = p_0 + \mathcal{P}(r)\cos\theta$, em que p_0 é uma constante de integração;
- e - O problema agora consiste em achar $f(r)$, $g(r)$ e $\mathcal{P}(r)$. Precisamos então obter as equações governantes para essas funções. Utilize essas substituições na equação da continuidade para encontrar uma equação que relacione $f(r)$ e $g(r)$;
- f - Faça o mesmo procedimento para as equações do movimento em r e θ. Nesse momento você deve ter equações diferenciais que relacionam as funções f, g e $\mathcal{P}$;
- g - Derive a versão obtida da equação do movimento em θ (já em termos de f, g e $\mathcal{P}$) com relação à r;
- h - Some o resultado obtido com a equação do movimento em r (já em termos de f, g e $\mathcal{P}$) e use a equação da continuidade obtida no item e para mostrar que:

$$\frac{r^4}{8}\frac{d^4 f}{dr^4} + r^3\frac{d^3 f}{dr^3} + r^2\frac{d^2 f}{dr^2} - r\frac{df}{dr} = 0;$$

- g - A equação obtida no item anterior é uma equação diferencial ordinária de Euler de quarta ordem. Proponha uma solução do tipo $f(r) = r^k$ e substitua na equação obtida no item anterior. Ao fazer isso você obterá uma equação polinomial de quarta ordem para k. Mostre que as raízes dessa equação são $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = -3$ e $k_4 = 2$.
- h - A partir das raízes obtidas no item anterior podemos propor uma solução geral para $f(r)$ na forma de uma combinação linear dessas potências de r, de tal sorte que $f(r) = C_1 + C_2 r^{-1} + C_3 r^{-3} + C_4 r^2$. Utilize as condições do contorno do problema para encontrar as constantes C_1, C_2, C_3 e C_4.
- i - Agora, a partir da determinação de $f(r)$ determine $g(r)$ e $\mathcal{P}(r)$. Seus resultados deverão ser:

$$f(r) = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2r^3}$$

$$g(r) = -1 + \frac{3}{4r} + \frac{1}{4r^3}$$

$$\mathcal{P}(r) = -\frac{3}{2r^2}$$

- h - Compare o decaimento do campo de pressão com o de velocidade. O que você pode dizer sobre esses decaimentos quando comparados com as funções de Green para o campo de pressão e velocidade obtidas através da solução fundamental?

Questão 06

Vamos utilizar agora os resultados obtidos na questão anterior para determinar a força hidrodinâmica que atua sobre a esfera. O cálculo dessa força é obtido através da integral do vetor de tensões sobre a superfície da esfera. Em outras palavras:

$$\boldsymbol{F_h} = \int_s \hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS,$$

em que $\boldsymbol{F_h}$ representa a força hidrodinâmica sobre a esfera, $\hat{n}$ é o vetor normal sobre a superfície da esfera ($\hat{n} = \hat{e}_r$) e $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \mu\nabla\boldsymbol{v} + \mu\left(\nabla\boldsymbol{v}\right)^T$ é o tensor de tensões do fluido Newtoniano viscoso. Aqui a integração é feita sobre a superfície da esfera. Para fazer esse cálculo siga os passos abaixo:

- a - Calcule primeiramente as componentes do produto $\hat{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ ou $\hat{e}_r\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Note que para esse escoamento (axissimétrico): $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr}\hat{e}_r\hat{e}_r + \sigma_{r\theta}\hat{e}_r\hat{e}_\theta + \sigma_{\theta r}\hat{e}_\theta\hat{e}_r + \sigma_{\theta\theta}\hat{e}_\theta\hat{e}_\theta$;

- b - Vamos calcular a força hidrodinâmica na direção do escoamento z. Portanto projete agora o resultado obtido no item anterior na direção $\hat{e}_z$ fazendo $\hat{e}_z\cdot\hat{e}_r\cdot\boldsymbol{\sigma}$;

- c - Nesse ponto você deve ter mostrado já que $\hat{e}_z\cdot\hat{e}_r\cdot\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta$. Avalie então o tensor de tensões na superfície da esfera e faça o cálculo da integração de $\hat{e}_z\cdot\hat{e}_r\cdot\boldsymbol{\sigma}$ na superfície da esfera. **Dica:** para realização dessa integral utilize o elemento de superfície $dS = a^2\sin\theta d\theta d\phi$, integrando através de uma integral dupla em $d\theta$ e $d\phi$ de 0 à π e de 0 à 2π respectivamente. Você chegará então na lei de Stokes que estabelece que a força hidrodinâmica aqui é dada por: $F_z = 6\pi\mu a u_\infty$.

Questão 07

Uma água viva nada evnvolvendo fluido lentamente no interior de seu corpo tipo "guarda-chuva"e em seguida ejetando a massa de fluido com alta velocidade. Devido a esse mecanismo a água viva desenvolve sua própria propulsão e adquire movimento. Explique se esse mecanismo funcionaria se a água viva tivesse dimensões microscópicas.

Questão 08

Uma esfera rígida translada com velocidade $\boldsymbol{U}$ e gira com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ em um fluido Newtoniano incompressível infinito. O vetor posição do centro da esfera é denotado por $\boldsymbol{x_p}$. Em grandes distâncias da esfera, o fluido é submetido a um cisalhamento simples (velocidade não perturbada $\boldsymbol{u_\infty}$). Esse escoamento pode ser representado na forma $\boldsymbol{u_\infty} = (\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{x}$. Em que

$$\boldsymbol{\Gamma} = \nabla\boldsymbol{u} = \dot{\gamma}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Aqui $\dot{\gamma}$ representa a taxa de cisalhamento do escoamento e $\boldsymbol{x}$ é o vetor posição associado com qualquer ponto arbitrário no fluido. Se o número de Reynolds do escoamento associado ao movimento de rotação e translação dessa esfera rígida num campo de cisalhamento é suficientemente pequeno de tal sorte que a aproximação de *Creeping flow* seja válida, mostre que a força $\boldsymbol{F}$ e o torque hidrodinâmico $\boldsymbol{T}$ sobre o corpo são dados por:

$$\boldsymbol{F} = a\mu\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{D}{:}\boldsymbol{\Gamma}\right)$$

e

$$\boldsymbol{T} = a\mu\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{G}{:}\boldsymbol{\Gamma}\right),$$

em que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{G}$ são tensores constantes, a é o raio da esfera e μ a viscosidade do fluido. **Dica:** use a característica de linearidade de escoamentos de Stokes e o princípio da superposição.

Questão 09

Uma esfera rígida de pequeno raio a tem uma velocidade terminal U_0 quando movimentando-se sob ação da gravidade através de um fluido infinito. Mostre que duas dessas esferas com distância entre centros d (em que $d \gg a$) cairão juntas com uma velocidade que excede U_0 por:

- a - $\frac{3U_0 a}{4d}$ quando a linha de centro que conecta as esferas é horizontal;
- b - $\frac{3U_0 a}{2d}$ quando a linha de centro que conecta as esferas é vertical;

Dica: assuma que as esferas são pontos de partícula e que o distúrbio na velocidade de uma das esferas, pela presença da outra é dado por $\frac{1}{8\pi\mu}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{G}$, em que $\boldsymbol{f}$ é a força gravitacional líquida por unidade de volume atuando em cada esfera e $\boldsymbol{G}$ é o tensor de Green para o campo de velocidades obtido através da solução fundamental.

Questão 10

Usando a lei de Stokes para um agregado esférico de raio R_a contendo N partículas esféricas rígidas de raios a mostre que a velocidade terminal do agregado $\boldsymbol{U_a}$ em *Creeping flow* pode ser dada por:

$$\boldsymbol{U_a} = \phi \left(\frac{R_a}{a}\right)^2 \boldsymbol{U_s},$$

em que ϕ é a fração volumétrica de partículas no agregado e $\boldsymbol{U_s}$ é a velocidade terminal de sedimentação de uma partícula isolada de raio a em $Re \ll 1$.