Lista - EM670 - Turma R

Prof. Rafael Gabler Gontijo

8 de abril de 2019

Questão 01

Como uma forma de prevenir a formação de gelo na superfície da asa de um pequeno avião pessoal, pequenas resistências elétricas são colocadas ao longo da asa e através da passagem de corrente elétrica acabam por aquecer a superfície da asa devido à irreversibilidade deste processo que acaba por transformar energia elétrica em calor pelo conhecido efeito Joule. Em condições típicas de voo a aeronave possui velocidade média de 100 m/s. A temperatura do lado de fora da aeronave é de -25^oC e o comprimento característico associado à corda da asa do avião é de 2m. Experimentos em escala reduzida realizados em túnel de vento indicam um coeficiente de atrito médio $\overline{C_f} = 0.0025$.

a - Qual é o fluxo de calor médio necessário para manter a temperatura da asa à 5^oC? Considerando que a área total das duas asas é de $7m^2$ e que 100% da potência elétrica utilizada pelo sistema de aquecimento é dissipada sobre a forma de calor, determine a potência do sistema de aquecimento em W. Utilize a analogia de Colburn que relaciona o o número de Stanton com coeficiente de atrito e com o número de Prandtl, dada por:

$$\overline{St} = \frac{\overline{C_f}}{2Pr^{2/3}}$$

sendo que o número de Stanton é definido por

$$\overline{St} = \frac{\overline{q''}}{\rho C_p u_\infty \Delta T}$$

em que o calor específico do ar a pressão constante é dado por $C_p = 1007J/kg.K$ e u_∞ representa a velocidade do ar. Considere $\rho = 1,2kg/m^3$ e $Pr = 0.7$.

b - Explique porque nesse caso podemos utilizar a informação de testes em túnel de vento realizados com modelos em escala reduzida para resolver um problema físico em escala real utilizando o mesmo valor do coeficiente de atrito medido em laboratório em escala reduzida. A explicação deverá ser breve em 3 linhas no máximo.

Questão 02

O princípio do balanço de momentos, conhecido como *segunda Lei de Newton*, aplicado a um volume de controle infinitesimal gera a famosa equação de Cauchy, uma equação clássica na mecânica dos meios contínuos, dada por

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + \rho \boldsymbol{g} \tag{1}$$

em que ρ é a massa específica do fluido (escalar), $\boldsymbol{g}$ é o vetor aceleração da gravidade, $\boldsymbol{v}$ é o campo de velocidades do escoamento e $\boldsymbol{\phi}$ é o tensor fluxo total de momento (tensor de segunda ordem). O tensor $\boldsymbol{\phi}$ contabiliza os fluxos convectivos ($\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$) e moleculares ($p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}$) de momento nos planos e direções em um ponto material qualquer no interior do meio. Nesse caso $\boldsymbol{I}$ representa o tensor identidade de segunda ordem. Já o tensor $\boldsymbol{\tau}$ está associado à características intrínsecas do meio. Para o caso de um fluido Newtoniano incompressível, este é dado por $\mu \left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right]$, em que μ representa a viscosidade do fluido. Baseado nisso, responda os seguintes itens:

a - Para um fluido Newtoniano compressível, o tensor fluxo molecular de momento é dado por: $\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{I} - \mu \left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right] + \lambda (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{I}$, em que λ é conhecido como o segundo coeficiente de viscosidade do fluido e está associado com efeitos de expansão volumétrica deste. Escreva as componentes π_{xx}, π_{yy} e π_{zz} do tensor $\boldsymbol{\pi}$

b - Por definição a pressão que atua em um meio deve ser equivalente a 1/3 do traço do tensor fluxo molecular de momento do meio. Baseado nesta informação determine o valor de λ em função da viscosidade do fluido μ. **Nota:** o traço de um tensor nada mais é do que a soma dos termos da diagonal deste, ou seja, $tr(\boldsymbol{\pi}) = \pi_{xx} + \pi_{yy} + \pi_{zz}$.

c - Volte sua atenção para a equação (1). Considere nesse caso $\boldsymbol{\phi} = \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\pi}$, em que $\boldsymbol{\pi}$ é fornecido na letra (a) desta mesma equestão. Considere também o valor de λ encontrado na letra (b). Utilizando notação indicial mostre que a substituição deste tensor na equação (1) leva à seguinte equação

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right) = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{g} \tag{2}$$

para deduzir a equação (2) você deverá considerar o princípio da conservação massa expresso numa formulação diferencial, expresso por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

Questão 03

Considere a figura (2) que ilustra o fenômeno da convecção natural em uma placa plana vertical.

A equação da continuidade para um fluido incompressível é dada por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{4}$$

já a equação de Navier-Stokes (balanço de momentos) para um fluido incompressível é dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}, \tag{5}$$

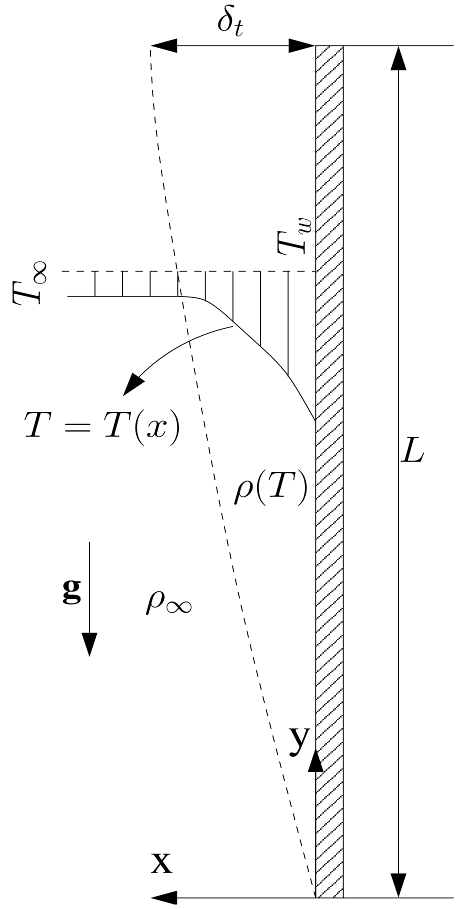

Figura 1: Convecção natural em placa plana vertical. Na figura é possível notar o crescimento da camada limite térmica δ_t, além de um perfil típico de temperatura no interior desta região.

finalmente a equação da energia, também para um fluido incompressível é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T, \tag{6}$$

em que ρ, ν e α denotam respectivamente a massa específica, a viscosidade cinemática e a difusividade térmica do fluido, $\boldsymbol{v}$, p e T representam respectivamente os campos de velocidade, pressão e temperatura do escoamento e $\boldsymbol{g}$ é a aceleração do campo gravitacional. Baseado nos seus conhecimentos das equações (4), (5) e (6) responda os seguintes itens.

O problema a ser considerado nesta questão consiste na convecção natural em uma placa plana vertical (ver figura 2). Neste fenômeno físico, uma placa vertical aquecida altera o campo de massa específica do fluido em torno desta. Como consequência, este gradiente de massa específica combinado com a presença de forças de empuxo gravitacionais gera correntes convectivas ascendentes conhecidas pelo nome de *convecção natural*. Neste contexto a massa específica do fluido varia unicamente devido à variações de temperatura. Este tipo de escoamento é conhecido como escoamento dilatável e as hipóteses de incompressibilidade do fluido que levam às equações (4)-(6) são válidas na medida em que os campos de pressão e velocidade são de fraca intensidade e não alteram significativamente a massa específica do fluido. Esta hipótese é conhecida como *hipótese de Boussinesq da convecção natural.*

a - Mostre através de técnicas de análise de escala que se o campo de velocidades é bidimensional, de modo que $\boldsymbol{v} = u(x, y)\hat{e}_x + v(x, y)\hat{e}_y$ e que se $\delta_t \ll L$, as seguintes simplificações são satisfeitas:

- $u \ll v$ (use a equação 4 para mostrar isso);
- $P = P(y)$ e o termo $\frac{\partial P}{\partial y}$ pode ser escrito como $\frac{dP_\infty}{dy}$ (use a componente x da equação 5 para mostrar isso);
- os termos $\frac{\partial}{\partial y^2} \ll \frac{\partial}{\partial x^2}$.

Através dessas simplificações mostre que o sistema de equações (4), (5) e (6) pode ser simplificado no interior da camada limite na condição de regime permanente para

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP_\infty}{dy} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - g \tag{8}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{9}$$

b - Considere que a pressão do escoamento não perturbado pela presença da placa varia de acordo com a lei fundamental da hidrostática $\left(\frac{dP_\infty}{dy} = -\rho_\infty g\right)$, mostre que se isso ocorre, então a equação (8) é escrita como

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}\left(\rho_\infty - \rho\right) g. \tag{10}$$

Ainda com relação ao último termo da equação (10), como a massa específica varia exclusivamente devido à variações de temperatura, considere a seguinte expansão em série de Taylor para que possamos escrever a massa específica ρ em um ponto qualquer em termos desta propriedade fora da camada limite ρ_∞:

$$\rho = \rho_\infty + \frac{\partial \rho}{\partial T}\left(T - T_\infty\right), \tag{11}$$

combinando (11) e (10) mostre que

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g\beta\left(T - T_\infty\right), \tag{12}$$

em que $\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}$ é conhecido como o coeficiente de expansão volumétrica do fluido.

c - O lado esquerdo da equação (12) representa o transporte de momento por efeitos convectivos. Já do lado direito temos dois termos. O primeiro termo do lado direito simboliza transporte difusivo de momento por ação da viscosidade do fluido enquanto o último termo representa as forças de empuxo responsáveis por gerar o escoamento em questão. Para a equação da energia (9) temos transporte de energia por efeitos convectivos (lado esquerdo) e difusivos (lado direito). Volte sua atenção à equação (9) e mostre por análise de escala que a velocidade v escala com os seguintes termos

$$v \sim \frac{\alpha L}{\delta_t^2},$$

em seguida volte sua atenção à equação (12). Neste caso temos duas possibilidades de balanço. Faça inicialmente um balanço entre os termos convectivos e de empuxo e mostre que

$$\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^4 Ra_L^{-1} Pr^{-1} \sim 1$$

faça agora um balanço entre termos difusivos e de empuxo e mostre que

$$\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^4 Ra_L^{-1} \sim 1,$$

em que Ra_L e Pr são dois números adimensionais conhecidos por números de Rayleigh e Prandtl respectivamente. Estes parâmetros são definidos como

$$Ra_L = \frac{g\beta \Delta T L^3}{\alpha \nu} \qquad \text{e} \qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha}.$$

d - Mostre que um balanço entre os termos difusivos e convectivos da equação (12) fornece

$$\frac{\text{Termos difusivos}}{\text{Termos convectivos}} \sim Pr,$$

desta forma para fluidos com alto números de Prandtl qual é o balanço apropriado para determinação da ordem de magnitude da camada limite térmica? Termos difusivos e empuxo? Ou termos convectivos e empuxo? Com base nessa resposta mostre que para fluidos com altos números de Prandtl temos

$$\frac{\delta_t}{L} \sim Ra_L^{-1/4},$$

como em um balanço entre fluxo de calor por condução (na parede) e convecção temos que $h \sim k/\delta_t$, mostre que nesse caso

$$Nu \sim Ra_L^{1/4},$$

em que Nu é o número de Nusselt dado por $Nu = \frac{hL}{k}$.

Questão 04

Considere o resfriamento de uma pá de turbina utilizada em um dispositivo criogênico bidimensional com comprimento característico de $L_{H_2} = 40mm$. Esta pá é exposta a um escoamento de hidrogênio H_2 a uma pressão $p_{H_2} = 2atm$, com velocidade $V_{H_2} = 8.1m/s$ e temperatura do escoamento não perturbado $T_{\infty,H_2} = -30^oC$. Deseja-se saber o valor do coeficiente de transferência de calor por convecção h_{H_2} quando a temperatura da superfície da pá é de $T_{s,H_2} = -15^oC$. Ao invés de realizar um experimento caro que demande a construção de uma bancada experimental envolvendo câmaras de hidrogênio à baixas temperaturas um engenheiro percebe que baseado no princípio da similaridade entre escoamentos com os mesmos parâmetros adimensionais, decide fazer um experimento em escala utilizando ar em um túnel de vento.

As propriedades conhecidas do escoamento no túnel de vento são: temperatura externa $T_{\infty,ar} = 23^oC$, temperatura da superfície $T_{s,ar} = 30^oC$ e comprimento característico de $L_{ar} = 60mm$. Nessas condições o fluxo de calor por convecção trocado entre a pá e o ar é de $q^{''} = 333,33W/m^2$. Com base nessas informações e sabendo que os números de Nusselt, Reynolds e Prandtl devem ser os mesmos tanto no experimento em escala utilizando túnel de vento quanto no caso real utilizando hidrogênio e utilizando as propriedades termodinâmicas listadas abaixo, responda os itens a seguir.

Ar à 1 atm e T $= 26.5^0C \rightarrow Pr = 0.707, \nu = 15.89{\times}10^{-6}m^2/s, k = 26.3{\times}10^{-3}W/m.K,$

H_2 à 2 atm e T $= -22.5^0C \rightarrow Pr = 0.707, \nu = 40.7{\times}10^{-6}m^2/s, k = 157{\times}10^{-3}W/m.K,$

a -Determine a velocidade V_{ar} requerida no túnel de vento para que o número de Reynolds do escoamento em escala seja idêntico ao número de Reynolds do escoamento real com hidrogênio;

b - Iguale os números de Nusselt dos dois escoamentos e utilize a lei do resfriamento de Newton para descobrir o valor de h_{H_2}.

Nota:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Nu = \frac{hL}{k}$$

Questão 05

Considere o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível (óleo lubrificante de mancais por exemplo) entre dois cilindros concêntricos. O cilindro interno é mantido estacionário enquanto o cilindro externo gira com velocidade angular Ω. O raio do cilindro interno é R_1 e o raio do cilindro externo é R_2. O espaçamento entre os cilindros é denotado pela letra b, em que $b = R_2 - R_1$. A temperatura na superfície do cilindro interno é T_0 enquanto a da superfície do cilindro externo é T_b. Considere ainda que $b \ll (R_1 + R_2)/2$, de modo que podemos aproximar a geometria cilíndrica na qual o fluido está confinado por um problema de um fluido se movimentando entre duas placas paralelas.

Nessas condições o perfil de velocidades do escoamento pode ser assumido linear, como em um cisalhamento simples, de modo que a expressão para o campo de velocidades nesse caso é dada por

$$\boldsymbol{v} = 0\,\hat{\boldsymbol{e_x}} + 0\,\hat{\boldsymbol{e_y}} + \Omega R_2 \left(\frac{x}{b}\right) \hat{\boldsymbol{e_z}}.$$

Considere ainda que a energia interna $\hat{u}$ é constante em toda a região entre os cilindros. Baseado no que foi dito no enunciado, resolva os seguintes itens:

a - Considere que o volume da região de análise é dado por $WL\Delta x$, em que $\Delta x = b$ é a espessura da região (distância entre as placas paralelas) e L e W denotam o comprimento (na direção z) e largura (na direção normal ao plano da folha) respectivamente.

A fim de estabelecer o balanço associado à primeira lei da termodinâmica, escreva as componentes nas direções x, y e z do vetor fluxo total de energia $\boldsymbol{\epsilon}$ já aplicando as hipóteses restritivas apresentadas no enunciado. A expressão para $\boldsymbol{\epsilon}$ é dada por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + \hat{u} \right) + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{q},$$

considere $\boldsymbol{\tau} = -\mu \left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T \right]$ e $\boldsymbol{q} = -k \nabla T$.

b - Estabeleça o balanço global de energia (primeira lei da termodinâmica) para este caso na condição de regime permanente sem geração interna de energia por outras fontes e sem trabalho realizado por forças externas e obtenha uma equação diferencial ordinária simples que relacione derivadas com relação à x da componente x do vetor fluxo total de energia. Você deverá mostrar nesse caso que esta componente não varia na direção x. Para isso faça em determinado momento $\Delta x \to 0$, com isso você deverá utilizar o conceito de derivada aprendido em cálculo 1 conhecido como limite do quociente de Newton.

c - Utilizando o perfil de velocidades informado no enunciado do problema, obtenha uma expressão para a variação de temperatura ao longo da distância x em função de

$$T = f(x, T_0, T_b, b, k, \mu, \Omega, R_2).$$

d - Se a viscosidade do fluido é muito pequena qual simplificação pode ser obtida na expressão obtida na letra (c)? No caso em que $T_b = T_0$, ou seja, os dois cilindros possuem a mesma temperatura, em qual valor de x a temperatura do fluido entre os cilindros é máxima? Isso significa que a temperatura no interior do fluido pode ser mais alta que a temperatura das paredes? Como isso é possível? Esse aumento da temperatura é mais severo para valores pequenos ou altos de velocidade angular e viscosidade? Justifique todas as suas respostas.

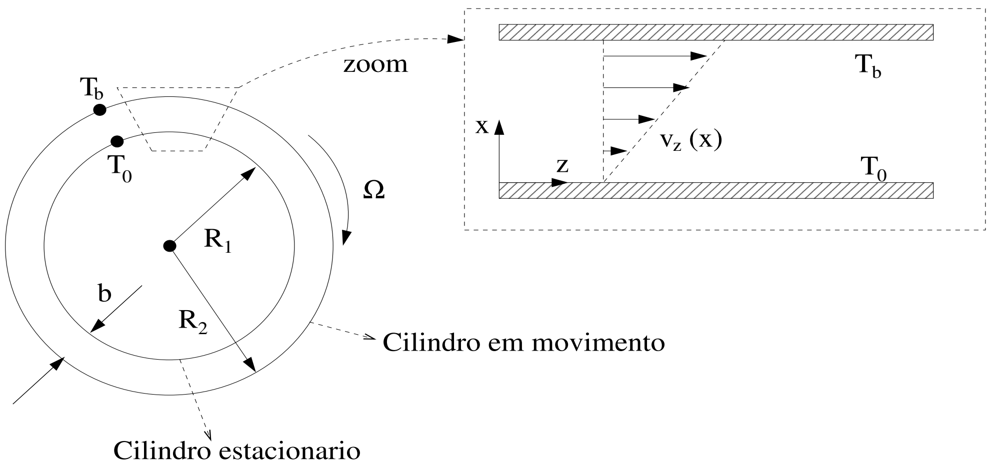

Figura 2: Figura esquemática da questão 05